PITAGORAS ACADEMIA

ÁLGEBRA

Profesor
Freddy Ávalos C

ECUACIONES

ECUACIONES POLINOMICAS

ECUACIONES POLINOMIALES

ECUACIÓN CÚBICA

Tienen la siguiente forma

$$ax^3 + bx^2 + cx + d = 0 \; ; \; a \neq 0$$

Para resolverlo:

I) Se factoriza (generalmente por el método de divisores binómicos)

II) Se aplica el teorema

$$\boxed{ab = 0 \quad \rightarrow \quad a = 0 \;\vee\; b = 0}$$

III) Se encuentran las raíces

IV) Se encuentran su conjunto solución

Ejemplo Resolver: $x^3 - 3x + 2 = 0$

Resolución: Factorizando:

	1	0	−3	2
1	↓	1	1	−2
	1	1	−2	0

$$(x-1)(x^2 + x - 2) = 0 \longrightarrow \underbrace{(x-1)}_{=0}\underbrace{(x-1)}_{=0}\underbrace{(x+2)}_{=0} = 0$$

$$\begin{matrix} x & +2 \\ x & -1 \end{matrix}$$

$\longrightarrow$ $(x-1) = 0 \;\vee\; (x-1) = 0 \;\vee\; (x+2) = 0$

$\longrightarrow$ Raíces: $1;\; 1;\; -2$ $\quad (3\ raíces)$

$\longrightarrow$ C.S = $\{1; -2\}$ $\quad (2\ soluciones)$

ECUACIONES POLINOMIALES

Ejemplo Resolver: $x^3 - 3x^2 + 2x = 0$

Resolución: Factorizando:

$$x^3 - 3x^2 + 2x = 0$$

$$x(x^2 - 3x + 2) = 0$$

$$\begin{array}{ll} x & -2 \\ x & -1 \end{array}$$

$\longrightarrow$ $x(x-2)(x-1) = 0$

$\longrightarrow$ $x = 0 \;\vee\; (x-2) = 0 \;\vee\; (x-1) = 0$

$\longrightarrow$ Raíces: $0;\;\; 2;\;\; 1$ $\quad (3\ raíces)$

$\longrightarrow$ C.S = $\{0; 2; 1\}$ $\quad (3\ soluciones)$

Ejemplo Resolver: $x^3 - 2x^2 + 4x - 8 = 0$

Resolución: Factorizando:

	1	-2	4	-8
2	$\downarrow$	2	0	8
	1	0	4	0

$\longrightarrow (x-2)(x^2+4) = 0 \longrightarrow (x-2) = 0 \;\vee\; (x^2+4) = 0$

$$x = 2 \quad \vee \quad x^2 = -4$$

$$x = 2 \quad \vee \quad x = 2i \quad \vee \quad x = -2i$$

Raíces: $2;\;\; 2i;\;\; -2i$ $\quad (3\ raíces)$

C.S = $\{2; 2i; -2i\}$ $\quad (3\ soluciones)$

ECUACIONES POLINOMIALES

TEOREMA DE CARDANO - VIETTE

Si $x_1;\ x_2;\ x_3$ son las raíces de la ecuación

$$\overset{+}{ax^3} \overset{-}{+ bx^2} \overset{+}{+ cx} \overset{-}{+ d} = 0\ ;\ a \neq 0$$

Se cumple que:

$$I)\ x_1 + x_2 + x_3 = -\frac{b}{a}$$ **(De 1 en 1)**

$$II)\ x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1 = \frac{c}{a}$$ **(De 2 en 2)**

$$III)\ x_1.x_2.x_3 = -\frac{d}{a}$$ **(De 3 en 3)**

Ejemplo 1 Si $m; n; p$ son las raíces de la ecuación

$$4x^3 + 7x^2 - 5x - 9 = 0$$

$$\underset{a}{\uparrow}\quad \underset{b}{\uparrow}\quad \underset{c}{\uparrow}\quad \underset{d}{\uparrow}$$

Entonces, por el teorema de Cardano - Viette:

$$I)\ m + n + p = -\frac{b}{a} = -\frac{7}{4}$$

$$II)\ mn + mp + np = \frac{c}{a} = \frac{(-5)}{4} = -\frac{5}{4}$$

$$III)\ m.n.p = -\frac{d}{a} = -\frac{(-9)}{4} = \frac{9}{4}$$

Teorema Fundamental del Álgebra

Toda ecuación polinomial P(x) = 0, donde P(x) es un polinomio de cualesquiera coeficiente numérico de grado mayor que la unidad, tiene por lo menos una raíz generalmente compleja.

Corolario : Toda ecuación polinomial de grado "n" tiene exactamente "n" raíces.

* $x^2 - x + 5 = 0$ tiene 2 raíces

* $x^7 + x = 1$ tiene 7 raíces

RAÍZ O CERO DE UN POLINOMIO

$\boldsymbol{\alpha}$ ($\boldsymbol{\alpha} \in \boldsymbol{C}$) es una raíz o cero del polinomio P(x) $\longleftrightarrow$ P($\boldsymbol{\alpha}$) $= \mathbf{0}$

Ejemplo

Sea el polinomio P(x) = $x^3 + x + 10$

P(-2) = $(-2)^3 + (-2) + 10 = -8 - 2 + 10 = 0$

$$\therefore -2 \; es \; una \; raiz \; o \; cero \; de \; P$$

TEOREMA DEL FACTOR

Si α ($\alpha \in$ C) es una raíz o cero del polinomio P(x) , entonces (x-α) *es un factor de* P(x), es decir:

$$\boxed{P(x) = a_0(x-\alpha)Q(x)} \quad ; \; Q(\alpha) \neq 0$$

RAIZ DE MULTIPLICIDAD "k" DE UN POLINOMIO

Si α *es una raíz o cero de multiplicidad k* (k es N)*del polinomio* $P(x)$ entonces :

$$\boxed{P(x) = a_0(x-\alpha)^k Q(x)} \quad ; Q(\alpha) \neq 0$$

Teorema de Cardano - Viette :

Dada la ecuación polinomial de grado "n", cuya estructura es :

$$a_o x^n + a_1 x^{n-1} a_2 x^{n-2} + a_3 x^{n-3} + \ldots + a_n = 0$$

si sus raíces son : $x_1 ; x_2 ; x_3 ; \ldots\ldots \wedge x_n$

se cumple :

ECUACIONES POLINOMIALES

1. Suma de raíces :

$$x_1 + x_2 + x_3 + \ldots + x_n = -\frac{a_1}{a_o}$$

2. Suma de productos binarios :

$$x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 + \ldots + x_{n-1}x_n = \frac{a_2}{a_o}$$

3. Suma de productos ternarios :

$$x_1x_2x_3 + x_1x_2x_4 + \ldots + x_{n-2}x_{n-1}x_n = -\frac{a_3}{a_o}$$

En general, si " s_k " representa la suma de los productos de las raíces tomadas de "k" en "k", se cumple :

$$\boxed{s_k = (-1)^k \cdot \frac{a_k}{a_o}}$$

ECUACIONES POLINOMIALES

Veamos un ejemplo para la ecuación :

$$2x^3 + 5x^2 + 10x - 1 = 0$$

$$x_1 + x_2 + x_3 = -\frac{5}{2}$$

$$x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 = \frac{10}{2} = 5$$

$$x_1x_2x_3 = -\frac{-1}{2} = \frac{1}{2}$$

$$x^4 - 3x^2 - 6x - 2 = 0$$

Para aplicar el teorema de Cardano, la ecuación se Debe completar con ceros:

$$x^4 + 0x^3 - 3x^2 - 6x - 2 = 0$$

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = -\frac{0}{1} = 0$$

$$x_1x_2 + x_1x_3 + x_1x_4 + x_2x_3 + x_2x_4 + x_3x_4 = -\frac{3}{1} = -3$$

$$x_1x_2x_3 + x_1x_2x_4 + x_2x_3x_4 + x_1x_3x_4 = -\frac{-6}{1} = 6$$

$$x_1x_2x_3x_4 = -\frac{2}{1} = -2$$

Teoremas Adicionales :

1. *Paridad de raíces imaginarias :*

Sea P(x) = 0 una ecuación polinomial, donde P(x) es un polinomio de coeficientes reales, si una raíz de la ecuación es el número imaginario a+ bi, otra raíz será a-bi.

2. *Paridad de raíces irracionales :*

Sea P(x) = 0 una ecuación polinomial, donde P(x) es un polinomio de coeficientes racionales, si una raíz de la ecuación es el número irracional :

$a+\sqrt{b}\,/\,a\,\varepsilon\,Q \wedge \sqrt{b}\,\varepsilon\,Q'$, entonces, otra raíz será : $a-\sqrt{b}$.

TEOREMA DEL VALOR INTERMEDIO

En todo polinomio $P(x)$ de coeficientes reales, si $P(a).P(b)<0$, entonces existe al menos una raíz real $x_0 \in <a,b>$.

Ejemplo 1 Sea $P(x)=x^3-2x-5$

Se observa que: $P(2)=8-4-5 \Rightarrow P(2)=-1$

$P(3)=27-6-5 \Rightarrow P(3)=16$

y como $P(2).P(3)<0 \Rightarrow$ existe al menos una raíz x_0 de $P(x)$ en el intervalo $<2, 3>$.

Ejemplo 2 ¿Cuántas raíces reales tiene el $P(x)=x^3-3x^2-4x+11$?

Resolución: Se verifica que:

$$P(-2).P(-1)<0 \Rightarrow \exists\, x_1 \in <-2,-1> / P(x_1)=0$$

$$P(1).P(2)<0 \Rightarrow \exists\, x_2 \in <1,2> / P(x_2)=0$$

$$P(3).P(4)<0 \Rightarrow \exists\, x_3 \in <3,4> / P(x_3)=0$$

$\therefore$ el polinomio tiene tres raíces reales.

TEOREMA DE ROLLE (Raíz múltiple)

Si el polinomio $P(x)=(x-a)^k q(x)$ $/q(a)\neq 0$ se cumple:

$$P(a)=0$$
$$P'(a)=0$$
$$P''(a)=0$$
$$\vdots$$
$$P^{(k-1)}(a)=0$$

Es decir, todas sus derivadas hasta el orden $(k-1)$ se anulan en "a".

ECUACIONES POLINOMIALES

Ejemplo 1

Sea $P(x)=x^3-3x^2+3x-1$

Se observa que $P(1)=1-3+3-1=0$

Además, $P'(x)=3x^2-6x+3 \Rightarrow P'(1)=3-6+3=0$

$P''(x)=6x-6 \Rightarrow P''(1)=6-6=0$

Entonces, 1 es una raíz triple en el polinomio.

MOMENTO DE PRACTICAR

- **PROBLEMAS Y RESOLUCIÓN**

ECUACIONES POLINOMIALES

01. Si una raíz de la ecuación

$$(m-1)x^3 - 2mx - 16 = 0 \quad \text{es } x = 2$$

Entonces el valor de "m" es

A) 4 B) 6 C) 8

D) 5 E) 3

Por definicion de raiz:

$(m-1)8-2m(2)-16=0 \rightarrow 8m-8-4m-16=0$

$\rightarrow 4m = 24 \rightarrow m = 6$

ECUACIONES POLINOMIALES

02. Determine el valor de verdad de cada uno de las siguientes proposiciones acerca de la siguientes ecuación polinomial.

$P_{(x)} = (x-2)^3 (x^3-8)^2 (x+1)^5 (x^2-x-1) = 0$

I. Presenta 16 soluciones

II. Tiene 12 raíces

III. Posee una raíz de multiplicidad 2

A) FVV B) VVV C) VFF

D) FFV E) FFF

Factorizando P :

$P(x) = (x-2)^3(x-2)^2(x^2+2x+4)^2(x+1)^5(x^2-x-1)$

$P(x) = (x-2)^5(x^2+2x+4)^2(x+1)^5(x^2-x-1)$

$\Delta < 0$ $\Delta > 0$

N° de raices = Gdo(p) = 16

N° de soluciones= 6 soluciones

Hay una taíz imaginaria de multiplicidad 2

ECUACIONES POLINOMIALES

03. Indicar la suma de todas las soluciones de la ecuación

$$x^4 + 3x^3 + x^2 - 3x - 2 = 0$$

A) -3 B) -2 C) 1

D) -1 E) 0

Factorizando la ecuación:

$$x^4 + 3x^3 + x^2 - 3x - 2 = 0$$

$$\begin{array}{ccc} x^2 & 3x & 2 \\ x^2 & 0x & -1 \end{array}$$

$$(x^2 + 3x + 2)(x^2 - 1) = 0 \rightarrow (x+2)(x+1)(x+1)(x-1) = 0$$

$$\rightarrow (x+2)(x+1)^2(x-1) = 0$$

N° soluciones = 3

$$\sum soluciones = -2 - 1 + 1 = -2$$

ECUACIONES POLINOMIALES

04. Que condición debe de cumplir a ∈ R si todas las raíces de la ecuación

$$x^3 - 3x^2 + x(a+2) - a = 0$$

Son reales:

A) a > 0 B) a < 0 C) a ≥ 1

D) a ≤ 1 E) R

Factorizando al polinon

p.c=$\pm 1; \pm a$

	1	-3	a+2	-a
1		1	-2	a
	1	-2	a	0

(x-1)$(x^2 - 2x + a) = 0$

X=1 ya es raíz real → $x^2 - 2x + a = 0$ *tambien tendrá raíces reales*

Entonces se cumple : $\Delta \geq 0$

$\rightarrow (-2)^2 - 4(1)(a) \geq 0 \rightarrow a \leq 1$

ECUACIONES POLINOMIALES

05. De la siguiente ecuación :

$$x^5 + x^4 - 9x^3 - x^2 + 20x - 12 = 0$$

Que se puede afirmar con respecto a sus raíces

A) Todas son positivas

B) Todas son negativas

C) Todas son raíces simples

D) Hay 4 soluciones

E) -1 es un raíz de multiplicidad "2"

	1	1	-9	-1	20	-12
1		1	2	-7	-8	12
	1	2	-7	-8	12	0
1		1	3	-4	-12	
	1	3	-4	-12	0	
2		2	10	12		
	1	5	6	0		

$\rightarrow (x-1)^2(x-2)(x^2+5x+6) = 0$

$\rightarrow (x-1)^2(x-2)(x+2)(x+3) = 0$

1 es raíz doble

2

-2

-3

raíces simples

ECUACIONES POLINOMIALES

06. Si de la siguiente ecuación

$$P_{(x)} = (x+3)^5 (x-n)^2 (x-2)^m = 0$$

Tiene 10 raíces y su suma de soluciones es 2 calcular m/n

si $n \neq 2 \wedge n \neq -3$

A) 1 B) 2/3 C) −1/3

D) −1 E) −2

N° de raíces = Gdo(p) = 5+2+m=10→m=3

∑⟦soluciones=−3+n+2=2→n=3⟧

Por lo tanto: m/n = 1

ECUACIONES POLINOMIALES

07. En la ecuación

$(a + b)\,x^3 - (a + c)\,x^2 + (b + c)\,x - 2b = 0$

Presenta una raíz igual a -3 de multiplicidad 2. Hallar a/c

A) 1 B) 7 C) 7/3

D) 1/3 E) 3/4

	a+b	-a-c	b+c	-2b
1		a+b	b-c	2b
	a+b	b-c	2b	0

→ (x-1)((a+b)x^2+($b-c$)x+2b)=0

Se cumple: a+b=1

b-c=6

2b=9

b= 9/2 →c=−32 ; a = -7/2

Por lo tanto: a/c = 7/3

ECUACIONES POLINOMIALES

08. Si las raíces de la ecuación $x^3 - 2x^2 - 2 = 0$ son a, b, c calcular $a^3 + b^3 + c^3$

A) 14 B) 6 C) 8

D) −6 E) −8

por Cardano:

$$x^3 - 2x^2 + 0x - 2 = 0$$

a+b+c = 2
ab+bc+ac=0
abc =2

Por teoria de P-N : $(a+b+c)^3 = a^3 + b^3 + c^3 + 3(a+b+c)(ab+bc+ac) - 3abc$

Reemplazando los datos:

$$8 = a^3 + b^3 + c^3 + 3(2)(0) - 3(2)$$

Efectuando: $a^3 + b^3 + c^3 = 14$

ECUACIONES POLINOMIALES

09. Sean las raíces de la ecuación $x^3 + 3x^2 + 5x + 1 = 0$ a, b, c entonces hallar : $M = \frac{a}{bc} + \frac{b}{ac} + \frac{c}{ab}$

A) 2 B) −2 C) 3

D) 1 E) −1

Por Cardano: a+b+c = -3

ab+bc+ac = 5

abc= -1

Luego: $M = \frac{a^2+b^2+c^2}{abc} = \frac{(a+b+c)^2-2(ab+bc+ac)}{abc} = \frac{9-10}{-1} = 1$

ECUACIONES POLINOMIALES

10. Si una raíz de la ecuación

$$2x^3 - 13x^2 + Ax + B = 0$$

de coeficientes enteros es $3 + \sqrt{3}$ entonces. Hallar A/B.

A) –1 B) –2 C) 2

D) –5 E) –3

por paridad de raíces:

Si $3 + \sqrt{3}$ es una raíz → $3 - \sqrt{3}$ *también es raíz*

Por Cardano: $3+\sqrt{3} + 3 - \sqrt{3} + x_3 = 13/2 \rightarrow x_3 = 1/2$

Luego por teorema del factor:

$(2x-1)(x^2 - 6x + 6) = 2x^3 - 13x^2 + Ax + B$

Efectuando:

$2x^3 - 13x^2 + 18x - 6 = 2x^3 - 13x^2 + Ax + B$

A = 18 y B = -6

Por lo tanto: A/B = -3

FIN DE LA SESIÓN

PRACTICA Y APRENDERÁS